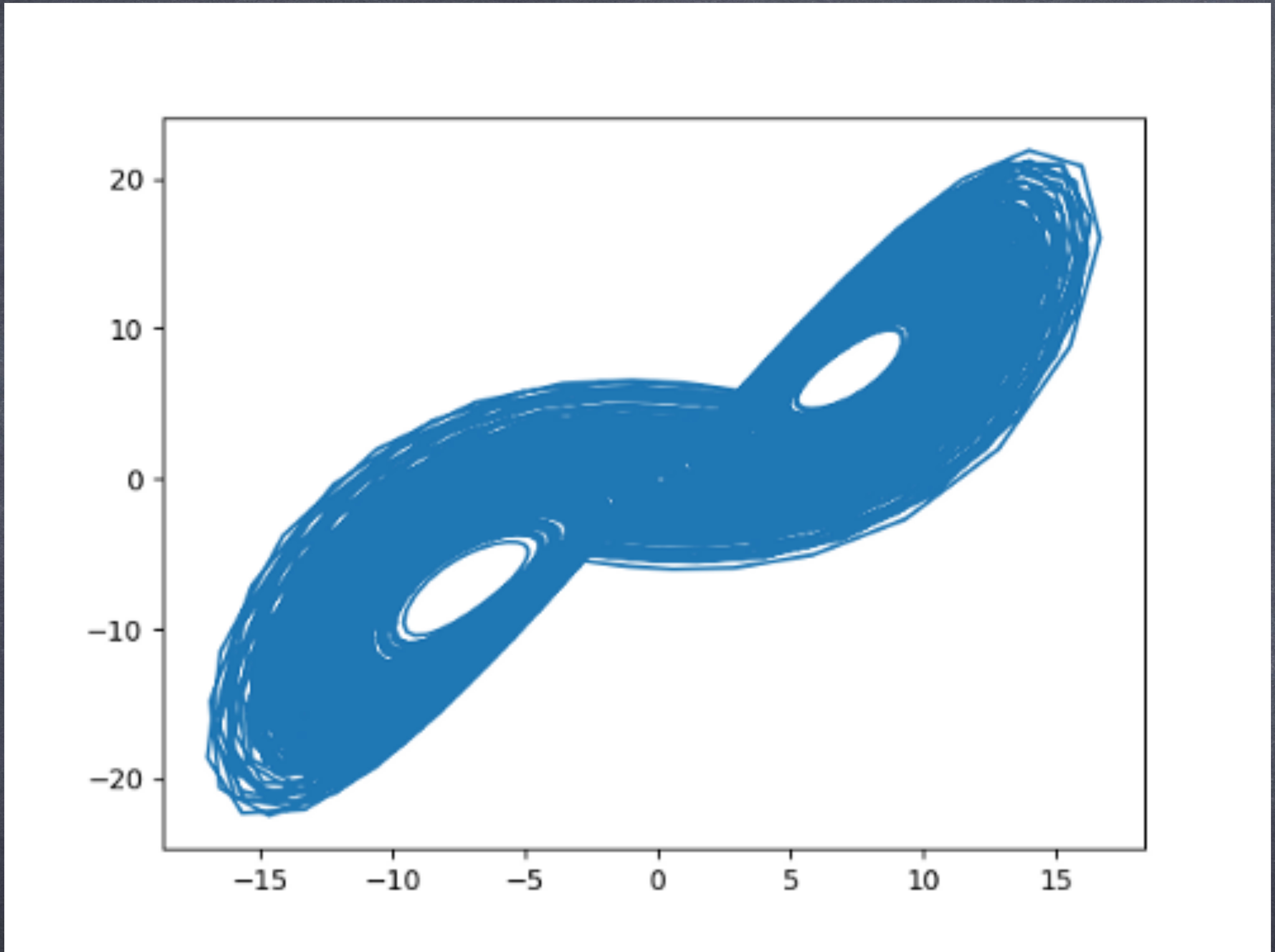
# TOPOLOGÍA APLICADA Y COMPUTACIONAL

## PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

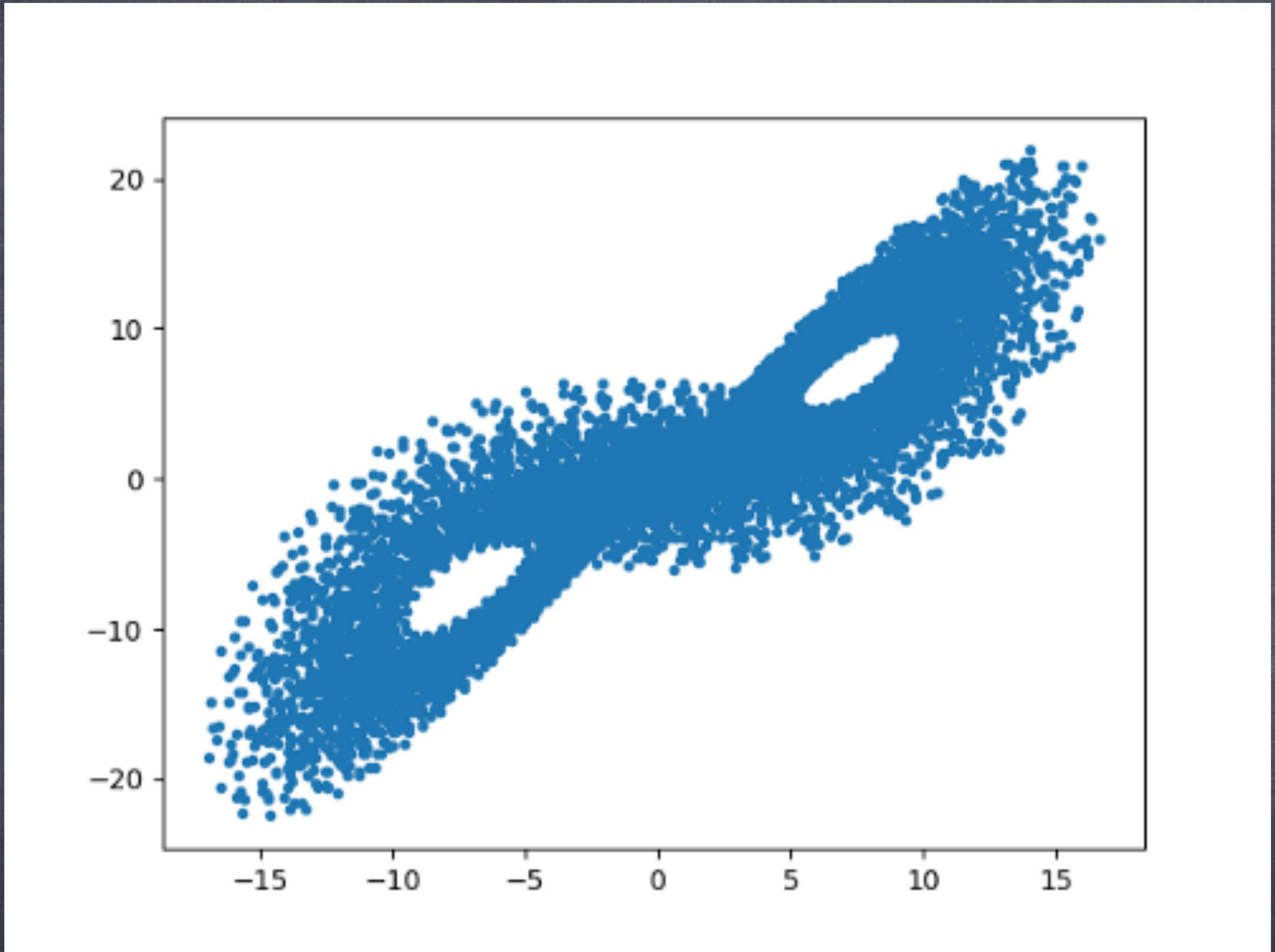
Profesor: Héctor Barge

# Motivación

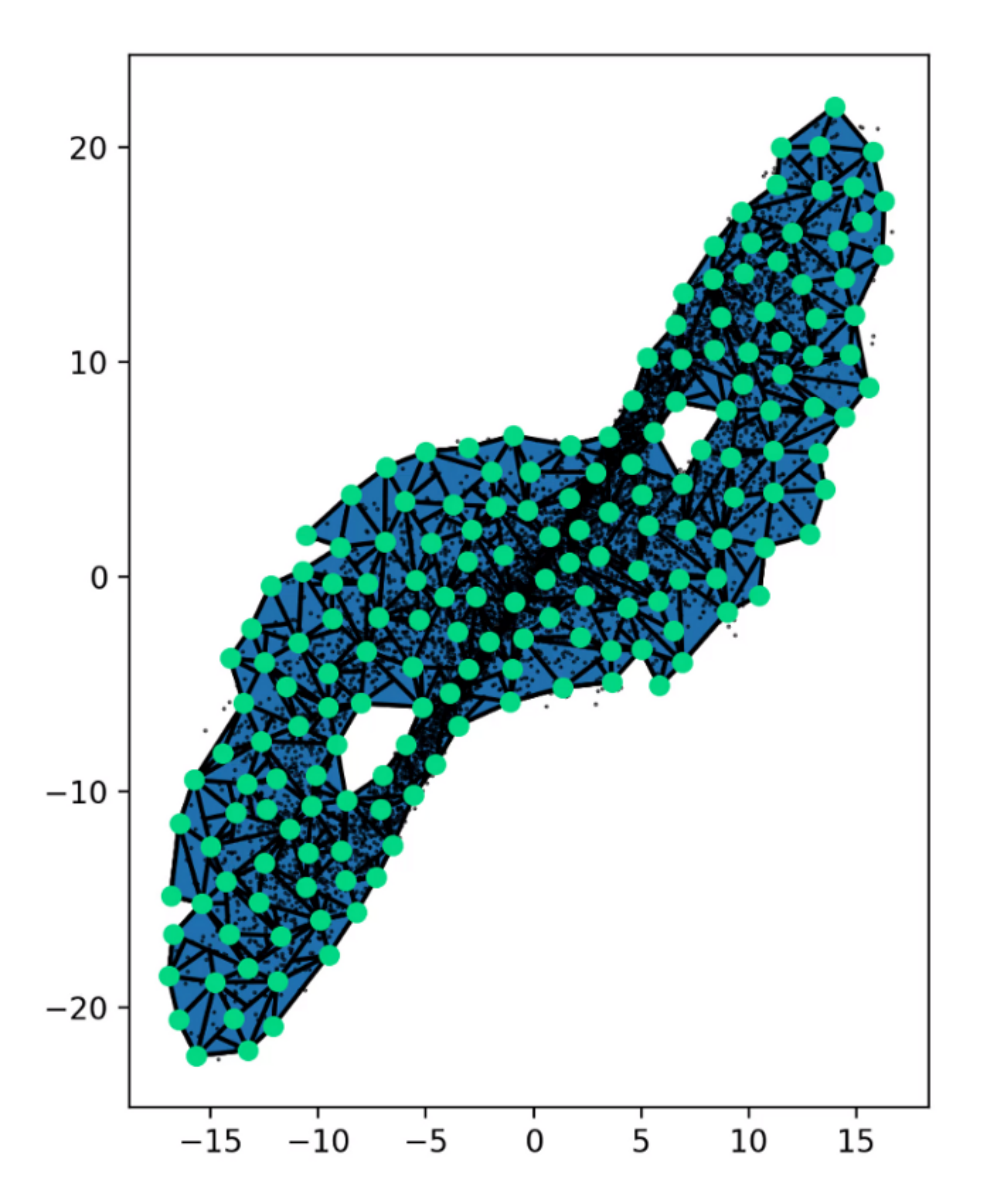
- Recuperar cualidades topológicas de un espacio a través de una muestra finita, posiblemente con ruido, del espacio en cuestión.




Atractor de Lorenz

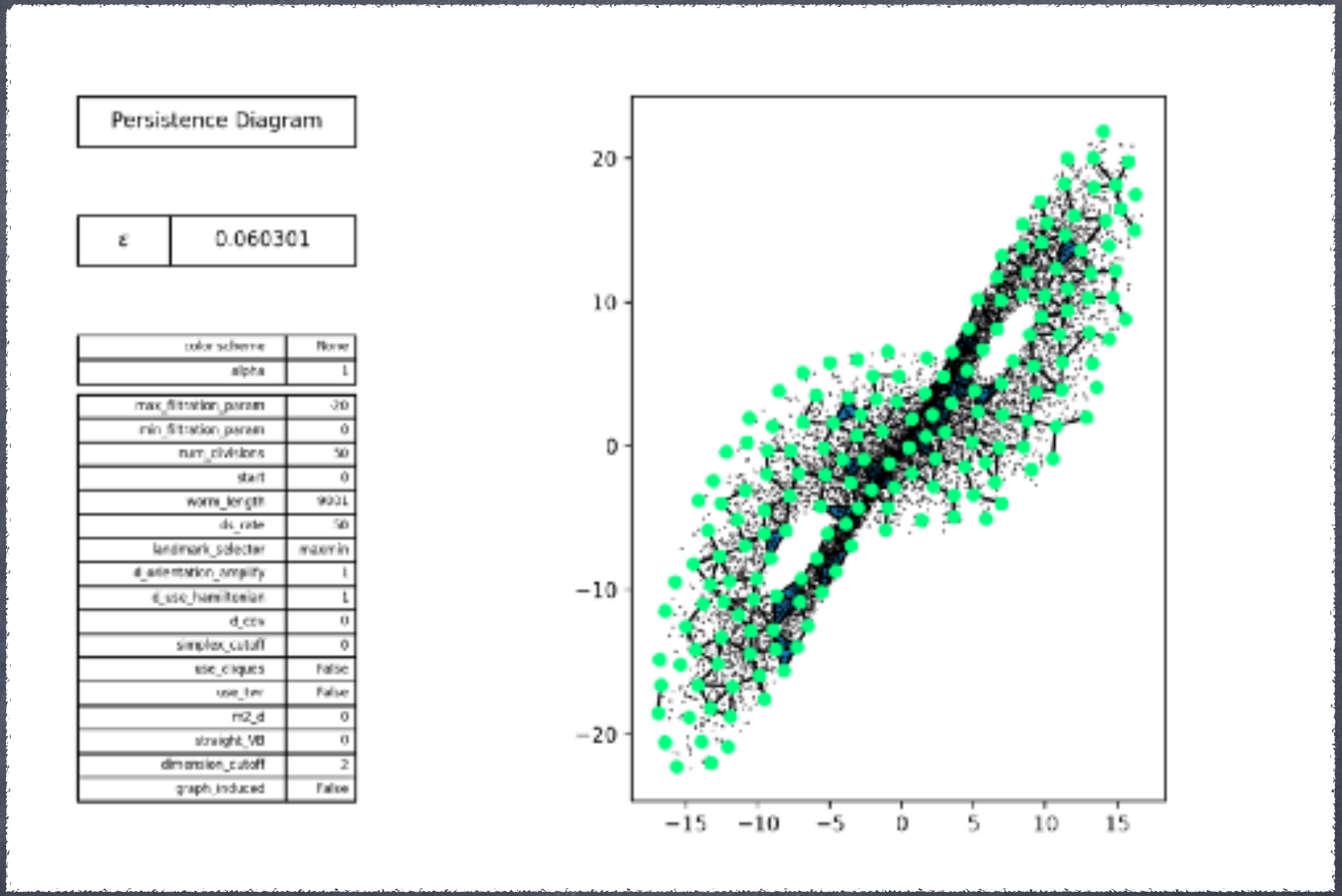



Muestra finita




Posible aproximación

- La aproximación anterior es solo una de una gama amplia de posibilidades como se muestra en el vídeo.
- Algunas de ellas recuperan bien ciertos aspectos topológicos del conjunto original, mientras que otras no lo hacen.



# ¿Cómo decidir cuál es la aproximación buena?

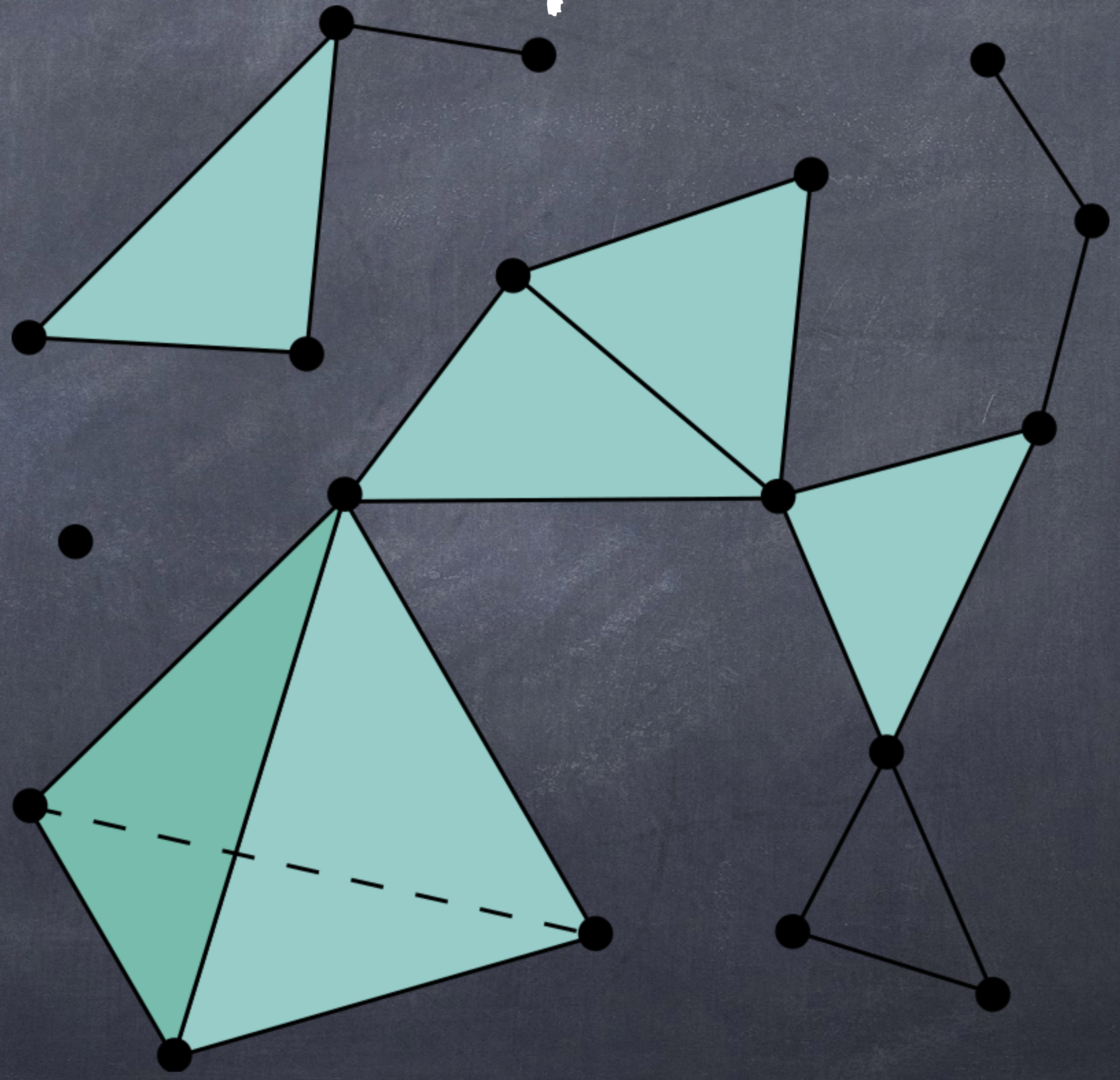
- No se escoge una particular. Se estudian todas y se observa qué cualidades topológicas de las aproximaciones <u>persisten</u> a medida que va variando la aproximación.

# ¿Cómo aproximar un espacio a través de una muestra?

- Dada una nube de puntos se le asocia un espacio topológico.
- Aunque es posible asociar distintos tipos de espacios a una nube de puntos, lo más habitual es utilizar complejos simpliciales.
- Existen diferentes técnicas para asociar complejos simpliciales a nubes de puntos y esto puede hacerse a diferentes escalas.

# ¿Qué es un complejo simplicial?

- Un complejo simplicial es un espacio topológico formado por "triángulos" de distintas dimensiones.



# ¿Qué información topológica nos interesa extraer?

- El número de componentes conexas.
- El número de túneles.
- En número de cavidades.
- En general el número de “agujeros” n-dimensionales.

- Esta información está encapsulada en los grupos de <u>homología simplicial</u>.
- Debido a la estructura combinatoria de los complejos simpliciales es posible calcular estos grupos utilizando técnicas de álgebra lineal.

# Homología persistente

- Dada una nube de puntos se le asocia una filtración de complejos simpliciales: $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$.
- Se estudia como varía la homología a medida que avanzamos en la filtración.

# Representación de la homología persistente

- Diagramas de persistencia.
- Códigos de barras.

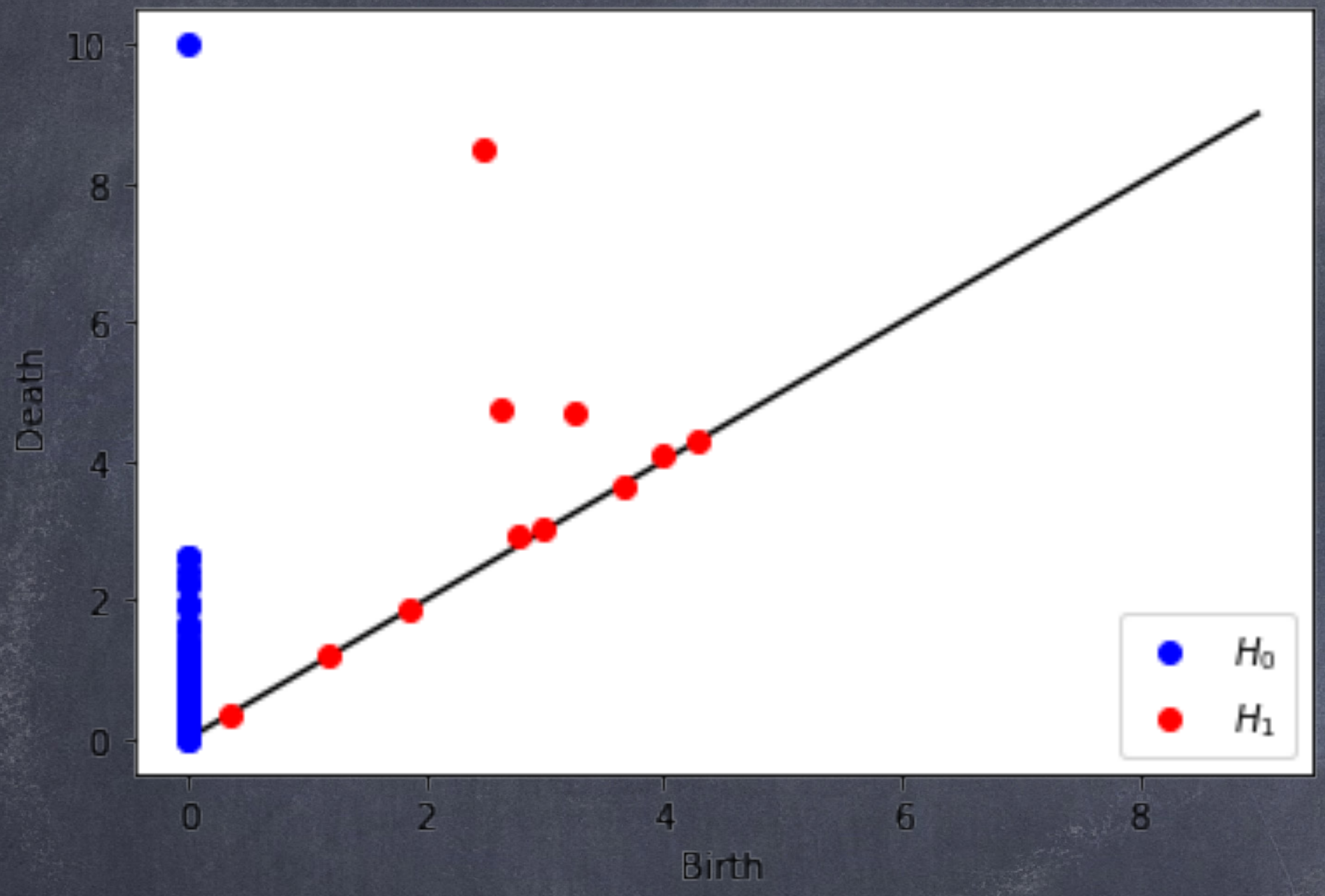
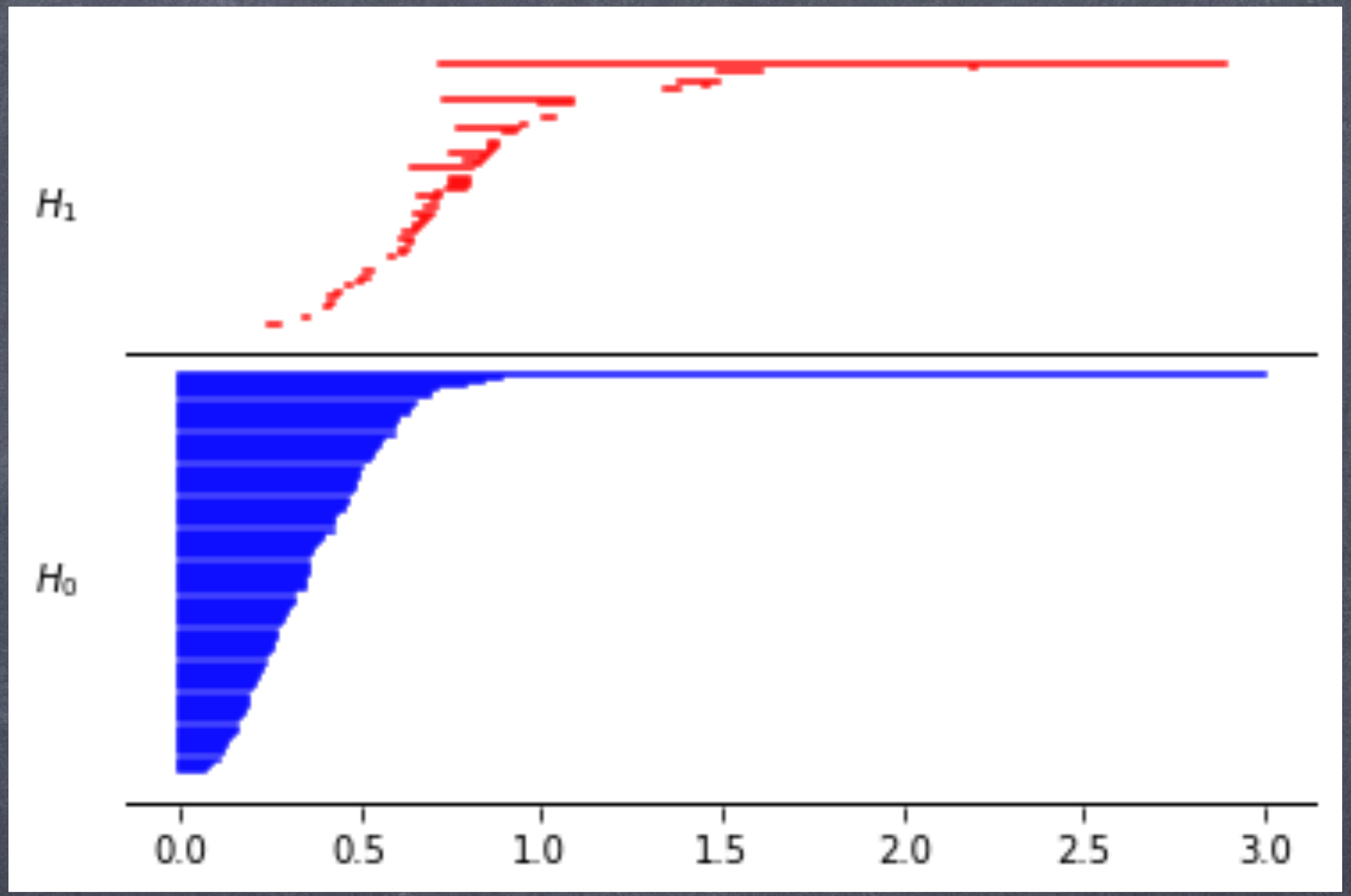



Diagrama de persistencia




Código de barras

# Estabilidad de la persistencia

- La homología persistente tiene la ventaja de que es robusta ante pequeñas perturbaciones. Es decir, pequeñas perturbaciones en los datos generan diagramas de persistencia y códigos de barras "cercanos".

# Algunas aplicaciones

- Sistemas dinámicos.
- Medidas de compresibilidad de proteínas.
- Redes neuronales.
- Medidas de expresión genéticas.
- Análisis de imágenes.

# Objetivos de la asignatura

- Introducir los conceptos básicos necesario para entender, calcular y representar la homología persistente asociada a una nube de puntos.
- Implementar en Python los algoritmos correspondientes.

# Tema 1: Complejos

- Complejos simpliciales. Aspectos combinatorios y topológicos.
- Nubes de puntos y complejos asociados. Complejo de Cech. Complejo de Vietoris-Rips. Alfa-complejos.
- Otros complejos. Complejos cúbicos. $\Delta$-complejos. CW-complejos.

# Tema 2: Homología y cohomología

- Grupos de homología simplicial y números de Betti.
- Cálculo de los grupos de homología simplicial.
- Homología relativa. Sucesiones exactas.
- Cohomología simplicial. Teorema de los coeficientes universales. Teoremas de dualidad.
- Algoritmo incremental para el cálculo de los números de Betti.

# Tema 3: Homología persistente

- Grupos de homología persistente.
- Representaciones de la homología persistente. Diagramas de persistencia. Códigos de barras.
- Cálculo de la homología persistente.
- Estabilidad de la homología persistente.

# Tema 4: Teoría de Morse

- Funciones de Morse discretas.
- Campos de vectores gradiente.
- Teoremas fundamentales de la teoría de Morse discreta. Desigualdades de Morse. Teorema del colapso.

# Evaluación

- Entregas de prácticas: cuatro prácticas (peso: 1.5/10 cada una).
- Documentación de las aplicaciones desarrolladas (peso: 2/10)
- Presentación final de prácticas (peso: 2/10).

# Bibliografía


- H. Edelsbrunner, J.L. Harer, Computational Topology. An introduction, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- R. Ghrist, Elementary Applied Topology, 2014.
- N. A. Scoville, Discrete Morse Theory, Student Mathematical Library, 90. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- A.J. Zomorodian, Topology for Computing, Cambridge Monographs on Applied Computational Mathematics, 16. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.